RB-0721/1000

RB-0721

Second Year B. Sc. Examination

March / April – 2010

Mathematics : Paper - III

(New)

Time : Hours] [Total Marks : **105**

સૂચના

(૧)

નીચે દર્શાવેલ ☛ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of ☛ signs on your answer book.

Name of the Examination :
☛ **S. Y. B. Sc.**

Name of the Subject :
☛ **Mathematics : Paper - 3 (New)**

☛ Subject Code No. : **0 7 2 1** ☛ Section No. (1, 2,.....) : **Nil**

Seat No. :

Student's Signature

(૨) **જમણી** બાજુનાં **અંક** પ્રશ્નોનાં ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) પ્રચલિત સંકેતોનો ઉપયોગ કરો.

૧ માંગ્યા મુજબ લખો : ૧૫

(૧) જો $f(x, y)=0$ અને $g(y, z)=0$ હોય તો દર્શાવો કે $f_y\, g_z \dfrac{dz}{dx}=f_x g_y$.

(૨) જો $u=\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ હોય તો સાબિત કરો કે $x\dfrac{\partial u}{\partial x}+y\dfrac{\partial u}{\partial y}=0$.

(૩) દ્વિગુણી સંકલ $\int_0^3 \int_1^2 xy(x+y)\, dx\, dy$ ની કિંમત શોધો.

(૪) $\int_0^\infty x^4 e^{-x} \cdot dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

(૫) જો $f(x, y)=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x, y) \neq (0, 0)$

$$=0, \quad (x, y)=(0, 0)$$

હોય તો $\lim\limits_{x \to 0}\left\{\lim\limits_{y \to 0} f(x, y)\right\}$ અને $\lim\limits_{y \to 0}\left\{\lim\limits_{x \to 0} f(x, y)\right\}$ શોધો.

૨ (અ) સમપરિમાણ વિધેયો માટેનું યુલરનું પ્રમેય લખો. ૬

(બ) દર્શાવો કે $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x^2+y^2}{x+y} = 1$. ૬

(ક) જો $u = \log\left(x^2+y^2+z^2\right)$ હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = y\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x} = z\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}.$$

અથવા

૨ (અ) જો $f(x,y)$ એ x અને yમાં m ઘાતવાળું સમપરિમાણ વિધેય હોય તથા fનું દ્વિતીય કક્ષાનું વિકલીત અસ્તિત્વ ધરાવતું હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1)f(x,y).$$

(બ) જો $f(x,y) = y^2\sin^{-1}\left(x/y\right) + x^2\tan^{-1}\left(y/x\right),\ (x,y)\neq(0,0)$ ૬

$= 0, \qquad (x,y) = (0,0)$

હોય તો દર્શાવો કે $f_{xy}(0,0) = f_{yx}(0,0)$.

(ક) જો ΔABC માં $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C =$ અચળ હોય તો ૬

સાબિત કરો કે $\frac{dB}{dC} = \frac{\tan A - \tan C}{\tan B - \tan A}$.

૩ (અ) સાબિત કરો કે ૬

$$e^{ax}\sin by = by + abxy + \frac{e^u}{\sigma}\left[\left(a^3x^3 - 3ab^2xy\right)\sin v + \left(3a^2bx^2y - b^3y^3\right)\cos v\right],$$

જ્યાં $u = a\theta x, v = b\theta y$ અને $0 < \theta < 1$.

(બ) વિધેય $f(x,y) = 2\left(x^2-y^2\right) - x^4 + y^4$નાં આંત્યિક મૂલ્યો મેળવો. ૬

(ક) જો $u^3+v^3 = x+y,\ u^2+v^2 = x^3+y^3$ હોય તો સાબિત કરો કે ૬

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{1}{2}\,\frac{y^2-x^2}{uv(u-v)}.$$

અથવા

૩ (અ) સાબિત કરો કે $\sin(ax+by)=(ax+by)-\frac{(ax+by)^3}{3!}+\frac{(ax+by)^5}{5!}$....... ૬

(બ) જો $u_1=\frac{x_2x_3}{x_1},\ u_2=\frac{x_1x_3}{x_2},\ u_3=\frac{x_1x_2}{x_3}$ હોય તો સાબિત કરો કે $J(u_1,u_2,u_3)=4$. ૬

(ક) જેનો સરવાળો 24 અને ગુણાકાર મહત્તમ થાય એવી ત્રણ ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ શોધો. ૬

૪ (અ) જો s એ રેખા $y=3x$, $x-$અક્ષ અને રેખા $x=6$થી બાધિત વિસ્તાર હોય તો $\iint_s x^2y^2dx\,dy$નું મૂલ્ય શોધો. ૬

(બ) દ્વિગુણી સંકલ $\int_0^{2a}\int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)\,dx\,dy$ના ચલોનો ક્રમ બદલો. ૬

(ક) સાબિત કરો કે $B(l,m)=\int_0^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{l+m}}\cdot dy$. ૬

અથવા

૪ (અ) $\iint_s f(x,y)\cdot dx\,dy$ની કિંમત શોધો, જ્યાં $f(x,y)=xy$ અને s એ રેખાઓ $y=0,\ x=2a$ તથા પરવલય $x^2=4ay$થી બનતો પ્રદેશ છે. ૬

(બ) દ્વિગુણી સંકલ $\int_0^{5}\int_{12y/5}^{\sqrt{169-y^2}} f(x,y)dx\,dy$ના ચલોનો ક્રમ બદલો. ૬

(ક) પ્રચલિત સંકેતોમાં દર્શાવો કે $B(l,m)=\frac{\overline{|l}\,\overline{|m}}{\overline{|l+m}}$, જ્યાં $l>0,\ m>0$. ૬

૫ (અ) સાબિત કરો કે બે ગણોના છેદગણનો વ્યસ્ત બરાબર તેના વ્યસ્તનો છેદગણ થાય. ૬

(બ) (૧) શ્રેણી $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_1=1,\ s_2=1$ અને $s_{n+1}=s_n+s_{n-1}$ (જ્યાં $n=2,3,4,.......$) વડે વ્યાખ્યાયિત થાય છે. તો s_7 અને s_8 શોધો. ૬

(૨) દર્શાવો કે શ્રેણી $1, 1/2, 1/3$........નું લક્ષ શૂન્ય છે.

(ક) જો B એ અગણ્ય ગણ Aનો ગણ્ય ઉપગણ હોય તો સાબિત કરો કે $A-B$ અગણ્ય છે. ૬

અથવા

૫ (અ) સાબિત કરો કે બધી જ સંમેય સંખ્યાઓનો ગણ ગણ્ય ગણ થાય છે. ૬

(બ) (૧) સાબિત કરો કે શ્રેણી $\left\{n-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ને કોઈ લક્ષ નથી. ૬

(૨) સાબિત કરો કે શ્રેણી $\left\{\dfrac{3n}{n+7n^{1/3}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ નું લક્ષ 3 છે.

(ક) જો $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ Lને અભિસારી હોય તો બતાવો કે $|s_n|_{n=1}^{\infty}$ એ $|<|$ને અભિસારી છે. એવી શ્રેણી $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ નું ઉદાહરણ આપો કે જેના માટે $\{|S_n|\}_{n=1}^{\infty}$ અભિસારી હોય પરંતુ $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ અભિસારી ન હોય. ૬

૬ (અ) અભિસારી શ્રેણીની વ્યાખ્યા આપી સાબિત કરો કે વાસ્તવિક સંખ્યાઓની બે અભિસારી શ્રેણીઓનો સરવાળો પણ અભિસારી છે. ૬

(બ) જો $n \in I^+$ માટે $S_n = \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ldots.(2n)}$ હોય તો સાબિત કરો કે $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ અભિસારે છે. ૬

(ક) જો વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ Lને અભિસારતી હોય તો દર્શાવો કે $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ L^2ને અભિસારે છે. ૬

અથવા

૬ (અ) નેસ્ટેડ ઈન્ટરવલ પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૬

(બ) જો $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ વાસ્તવિક સંખ્યાઓની શ્રેણી છે, અને ૬

$S_n = a_1 + a_2 + \ldots\ldots. a_n$ અને $t_n = |a_1| + |a_2| + \ldots\ldots. + |a_n|$, $\forall n \in I$

તો દર્શાવો કે જો $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ એ કોશી શ્રેણી હોય તો $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ પણ કોશી શ્રેણી છે.

(ક) જો $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ સિમીત શ્રેણી હોય અને $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ શૂન્યને અભિસારે છે તો સાબિત કરો કે શ્રેણી $\{S_n\, t_n\}_{n=1}^{\infty}$ પણ શૂન્યને અભિસારે છે.

ENGLISH VERSION

Instructions : (1) As per the instruction no. **1** of page no. **1**.
(2) Figures to the **right** indicate **full** marks of the question.
(3) Follow **usual** notations.

1 Do as directed : **15**

(1) If $f(x, y) = 0$ and $g(y, z) = 0$ then show that

$$f_y\, g_z \frac{dz}{dx} = f_x g_y .$$

(2) If $u = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$ then show that $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

(3) Evaluate $\int_0^3 \int_1^2 xy(x+y)\,dx\,dy$.

(4) Evalaute $\int_0^\infty x^4 e^{-x} \cdot dx$.

(5) If $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$

$= 0, \quad (x, y) = (0, 0)$

then find $\lim_{x \to 0} \left\{ \lim_{y \to 0} f(x, y) \right\}$ and $\lim_{y \to 0} \left\{ \lim_{x \to 0} f(x, y) \right\}$.

2 (a) State and prove Euler's theorem for homogeneous functions. **6**

(b) Show that $\lim_{(x, y) \to (1, 1)} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = 1$. **6**

(c) If $u = \log\left(x^2 + y^2 + z^2\right)$ then prove that **6**

$$x\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = y\frac{\partial^2 u}{\partial z\, \partial x} = z\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}.$$

OR

2 (a) If $f(x, y)$ is a homogeneous function in x, y of degree m and if second order partial derivatives of f exists then prove that **6**

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = m(m-1) f(x, y).$$

(b) If $f(x, y) = y^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$ **6**

$= 0, \qquad (x, y) = (0, 0)$

then show that $f_{xy}(0, 0) = f_{yx}(0, 0)$.

(c) If in ΔABC, $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = \text{constant}$, then prove that $\frac{dB}{dC} = \frac{\tan A - \tan C}{\tan B - \tan A}$. **6**

3 (a) Show that **6**

$$e^{ax} \sin by = by + abxy + \frac{e^u}{\sigma}\left[\left(a^3x^3 - 3ab^2xy\right)\sin v + \left(3a^2bx^2y - b^3y^3\right)\cos v\right],$$

where $u = a\theta x, v = b\theta y$ and $0 < \theta < 1$.

(b) Find the extreme values for the function **6**

$f(x, y) = 2\left(x^2 - y^2\right) - x^4 + y^4$.

(c) If $u^3 + v^3 = x + y$, $u^2 + v^2 = x^3 + y^3$ then show that **6**

$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{1}{2} \frac{y^2 - x^2}{uv(u - v)}$.

OR

3 (a) Show that $\sin(ax + by) = (ax + by) - \frac{(ax + by)^3}{3!} + \frac{(ax + by)^5}{5!}$....... **6**

(b) If $u_1 = \frac{x_2 x_3}{x_1}$, $u_2 = \frac{x_1 x_3}{x_2}$, $u_3 = \frac{x_1 x_2}{x_3}$ then show that **6**

$J(u_1, u_2, u_3) = 4$.

(c) Find three positive real numbers whose sum is 24 and their product is maximum. **6**

4 (a) If s is a region bounded by the line $y=3x$, $x-$axis and line $x=6$, then find the value of $\iint_s x^2y^2dx\,dy$. **6**

(b) Change the order of integration in the double integral $\int_0^{2a}\int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)\,dx\,dy$. **6**

(c) Prove that $B(l,m)=\int_0^{\infty}\frac{y^{m-1}}{(1+y)^{l+m}}\cdot dy$. **6**

OR

4 (a) Evaluate $\iint_s f(x,y)\cdot dx\,dy$; where $f(x,y)=xy$ and s is the region bounded by the lines $x=0,\ x=2a$ and parabola $x^2=4ay$. **6**

(b) Change the order of the double integral **6**

$\int_0^{5}\int_{12y/5}^{\sqrt{169-y^2}} f(x,y)dx\,dy$.

(c) In usual notations prove that $B(l,m)=\frac{\overline{|l}\,\overline{|m}}{\overline{|l+m}}$, $l>0,\ m>0$. **6**

5 (a) Show that the inverse image of the intersection of two sets is the intersection of the inverse images. **6**

(b) (1) Let $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence defined by $s_1=1,\ s_2=1$ and $s_{n+1}=s_n+s_{n-1}$ $(n=2,3,4,.......)$, then find s_7 and s_8. **6**

(2) Prove that the sequence $1, 1/2, 1/3........$ has limit 0.

(c) If B is a countable subset of an uncountable set A then prove that $A-B$ is uncountable. **6**

OR

5 (a) Prove that the set of all rational numbers is countable. **6**

(b) (1) Prove that the sequence $\left\{n - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ has no limit. **6**

(2) Prove that the sequence $\left\{\dfrac{3n}{n + 7n^{1/3}}\right\}_{n=1}^{\infty}$ has limit 3.

(c) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to L then prove that sequence $|S_n|_{n=1}^{\infty}$ converges to | L |. Give an example of a sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ for which $\{|S_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converges by $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ does not. **6**

6 (a) Define a convergent sequence and prove that the sum of two convergent sequences of real numbers is convergent. **6**

(b) For $n \in I^+$, let $S_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 ......(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 ....(2n)}$, prove that $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is convergent. **6**

(c) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a sequence of real numbers which converges to L then prove that $\{S_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ convergest to L^2. **6**

OR

6 (a) State and prove Nested interval theorem. **6**

(b) Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real numbers, and for each $n \in I$, let $S_n = a_1 + a_2 + ...a_n$ and $t_n = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$, prove that if $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence then the sequence $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is also Cauchy. **6**

(c) If $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a bounded sequence and $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to 0, then prove that $\{S_n\, t_n\}_{n=1}^{\infty}$ converges to 0. **6**